

# 10. Aufgabenblatt: Analysis 1

Lehrkräfteweiterbildung, 13 Q, 13 R, Sommer 2024

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

## Aufgabe 10.1

1) Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \frac{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\sqrt[n]{n}} + \frac{7n^2 + 3n - 2}{n^2 + 1}$$

2) Zeigen Sie, dass folgende Folge  $(b_n)_n$  monoton und beschränkt ist, und bestimmen Sie den Grenzwert.

$$b_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$$

3) Lösen Sie Aufgabe 3.2 mit Hilfe der Grenzwertsätze (bzw. Teilfolgen 2.16 VL).

## Aufgabe 10.2

1) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 + 4}{4^k}, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 1}{k^4 + 3}, \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2 + 2}$$

2) Welche wichtigen Reihen und deren Konvergenzverhalten kennen Sie?

**Aufgabe 10.3** Für welche  $a, b \in \mathbb{R}$  ist folgende Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $p = 1$  stetig?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 + x - 2} & \text{für } x > 1, \\ a & \text{für } x = 1, \\ b - x^2 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

**Aufgabe 10.4** 1) Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

$$f_1(x) = \sin^5(x) e^{x^2+3}, \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x^4+1}$$

2) Ist die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x|x|$ , im Punkt  $p = 0$  differenzierbar?

3) Untersuchen Sie, in welchen Bereichen folgende Funktion  $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton steigend bzw. fallend ist, und wo  $g$  lokale Extrema hat.

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

Wichtige Aufgaben zu folgenden Themen:

Folgen und Reihen: 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 5.1, 5.2, 5.3

Exponential- und Logarithmusfunktion: 6.1, 6.2

Grenzwerte und Stetigkeit: 7.1, 7.3, 7.4, 8.1

Differentialrechnung: 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 11.?

### Aufgabe 10.5

- 1) Geben Sie an, was folgende Aussagen definitionsgemäß bedeuten.
  - a) Die Folge  $(a_n)_n$  hat den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  (oder konvergiert gegen  $a$ ).
  - b) Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert.
  - c) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat bei  $p \in \mathbb{R}$  den Grenzwert  $q$ .
  - d) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $p \in \mathbb{R}$ .
  - e) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar in  $p \in \mathbb{R}$ .
  
- 2) Geben Sie in eigenen Worten wieder, was die Aussage folgender Sätze ist.
  - a) Der Satz vom Maximum und Minimum.
  - b) Der Zwischenwertsatz.
  - c) Der Mittelwertsatz.